数理解析研究所講究録
第 759 巻 1991 年 125-133

A generalization of Hilbert's theorem 94

都立大・理　鈴木　浩志 (Hiroshi Suzuki)

次の定理を示す。

定理　有限次代数体 k の不分岐 Abel 拡大 K について、K で単項になる k の ideal 類の個数は、拡大次数 $[K:k]$ で、割りきれる。

capitulation homomorphism は、Galois 群の group-transfer に言い換えられられるので、次を示せばじゅうぶんである。

定理 (*The group-theoretical version*)　有限群 H の、交換子群 H^c を含む部分群 N について、group-transfer $V_{H\to N}: H^{ab} \longrightarrow N^{ab}$ の kernel の位数は、$[H:N]$ で割りきれる。

Hilbert の定理 94 や principal ideal theorem は、上から容易に従う。

1.

群 G について、その交換子群を G^c、群環 $\mathbf{Z}[G]$ の augmentation ideal を、I_G とかく。また、

$$\begin{aligned} G^{ab} &= G/G^c, \\ Tr_G &= \sum_{g\in G} g \in \mathbf{Z}[G], \\ A_G &= \mathbf{Z}[G]/\langle Tr_G\rangle \end{aligned}$$

とおく。$\mathbf{Z}[G]$- 加群 M について、M の G- 不変な元全体からなる部分加群を M^G とかく。また、$v_1,\ldots,v_m \in M$ で生成された $\mathbf{Z}[G]$- 部分加群を、$\langle v_1,\ldots,v_m\rangle$ とかくことにする。有限集合 S の元の個数を $\sharp S$ とかく。

補題 1　有限 Abel 群 G 上、一つの元で生成された有限位数の加群 M について、$H^{-1}(G,M)$ の位数は、$H^0(G,M)$ の位数を割りきる。

先に次の事実を示す。

Fact 有限 Abel 群 G 上の有限位数の加群 N について、$\sharp N/I_GN \cdot N^G = 0$。

$$N/I_GN = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{Z}/q_i\mathbf{Z}$$

とし、$x_i \in N$ $(i = 1, \ldots, r)$ を、右辺の i-番目の生成元にうつるようにとり (i.e. $x_i \bmod N = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$)、$y_i = q_i \cdot x_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ とおく。また、

$$I_GN = \langle z_1, \ldots, z_{r'} \rangle$$

とし、

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{r'} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{r'} \end{pmatrix} \quad \in \bigoplus^{r+r'} N$$

とおく。この時、もちろん対角行列

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & q_r & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

により、$y = Q \cdot x$ であるが、

$$N = \langle x_1, \ldots, x_r, z_1, \ldots, z_{r'} \rangle$$

であることに注意すると、ある I_G-係数行列 $J \in M(r + r', I_G)$ が存在して、$y = J \cdot x$ と書けることがわかる。よって、$(Q - J) \cdot x = 0$。

$Q-J$ の余因子行列を、左からかければ、

$$det(Q-J)\cdot x = 0 \quad \text{in} \quad \overset{r+r'}{\bigoplus} N.$$

さらに、$det(Q-J) \equiv q_1 \cdot \ldots \cdot q_r \equiv \sharp N/I_G N \bmod I_G$ であるから、$I_G \cdot N^G = 0$ より、Fact がわかる。

補題 1 の証明。

Fact で、N を、M の Pontrjagin dual $N = M\hat{}$ とすれば、

$$\sharp M^G \cdot M/I_G M = 0$$

が出る。ここで、仮定から、$M/I_G M$ は巡回群である。よって、上は、

$$\sharp M/I_G M \mid \sharp M^G$$

を示している。この両辺を、$M/\operatorname{Ker}(Tr_G : M \longrightarrow M) \cong Tr_G M$ の位数で割れば、補題 1 が、わかる。

補題 2　位数 n の有限 Abel 群 G に対して、$A_G = \mathbf{Z}[G]/(Tr_G)$ と書いた時、$\overset{m-1}{\bigoplus} A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ の、m 個の元で生成された $\mathbf{Z}[G]$- 部分加群 Y について、$Y/I_G Y$ の位数は、n^{m-1} を割りきる。

証明。

Y の生成元を、$\{y_1, \ldots, y_m\}$ とする。$A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ の、各極大 ideal $\mathfrak{m}$ に対して、$c_{\mathfrak{m}} \in A_G \setminus \mathfrak{m}$ を、$\mathfrak{m}$ 以外の全ての $A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ の極大 ideal に含まれる (すなわち、$\mathfrak{m}$ 以外の極大 ideal での成分が 0 になる) ようにとる。この時、もし、ある $\mathfrak{m}$ について、

$$(\langle y_1, \ldots, y_{m-1}\rangle \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})_{\mathfrak{m}} \neq (Y \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})_{\mathfrak{m}}$$

だったとすると、左辺の $(A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})_{\mathfrak{m}}$- 線形空間の次元は、$m-1$ より小さい。よって、この場合、$(A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})_{\mathfrak{m}}$ 上 無駄な生成元がある。その添数を $i = i(\mathfrak{m})$ とすると、

$$(\langle y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i + c_{\mathfrak{m}} y_m, y_{i+1}, \ldots, y_{m-1}\rangle \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})_{\mathfrak{m}} = (Y \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})_{\mathfrak{m}}$$

である。そこで、i- 番目 の生成元 y_i を、 $y_i + c_{\mathfrak{m}} y_m$ と取り換えれば、

$$((\langle y_1, \ldots, y_{m-1}\rangle \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})_{\mathfrak{m}} = (Y \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})_{\mathfrak{m}}$$

とできる。この取り換えは、他の m には影響しないから、全ての m について、上が成立する、つまり

$$\langle y_1, \ldots, y_{m-1}\rangle \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = Y \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

としてよいことがわかる。

次に、$\overset{m-1}{\oplus} A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ の標準的な番目の生成元 $\bar{e}_i$; $i = 1, \ldots, m-1$ を、 y_i; $i = 1, \ldots, m-1$ にうつす $\mathbf{Z}[G]$- 準同型を、 π: $\overset{m-1}{\oplus} A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \longrightarrow Y \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ と書く。さらに、 $y \in \overset{m-1}{\oplus} A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ を、 $\pi(y) = y_m$ ととって、

$$Y' = \langle \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{m-1}, y\rangle \subseteq \overset{m-1}{\bigoplus} A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

とおく。すると $\pi(Y') = Y$ であるから、 $Y/I_G Y$ の位数は、 $Y'/I_G Y'$ の位数を割りきる。そこで、 Y を Y' と取り換えれば、 $i = 1, \ldots, m-1$ について

$$y_i = \bar{e}_i$$

は、 $\overset{m-1}{\oplus} A_G$ の標準的な i- 番目の生成元で、最後の

$$y_m = y$$

は、 $\overset{m-1}{\oplus} A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ の任意に与えられた元としてよいことがわかる。1 を、

$$e = 1 - 1/n \cdot Tr_G = \sum_{g \in G} -1/n \cdot (g-1)$$

にうつすことにより、 自然に $A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ を、 $\mathbf{Q}[G]$ の直和因子 $I_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ と、同一視することにする。

$$\begin{aligned} pr\colon \overset{m-1}{\bigoplus} A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \;\longrightarrow\; & \overset{m-1}{\bigoplus} A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} / \overset{m-1}{\bigoplus} I_G \\ = \; & \overset{m-1}{\bigoplus} I_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \end{aligned}$$

を、自然な射影とする。容易に、

$$(\overset{m-1}{\bigoplus} I_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z})^G = \langle pr(\bar{e}_1), \ldots, pr(\bar{e}_{m-1}) \rangle \cong \overset{m-1}{\bigoplus} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$

がわかる。特に、$I_G\langle pr(\bar{e}_1), \ldots, pr(\bar{e}_{m-1})\rangle = 0$ である。そこで、M を、一つの元 $pr(y)$ で生成された、$\overset{m-1}{\bigoplus} I_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ の有限位数の $\mathbf{Z}[G]$- 部分加群とすると、

$$\begin{aligned}
& \sharp Y/I_G Y \\
= \ & \sharp pr(Y)/I_G pr(Y) \\
= \ & \sharp (M + \langle pr(\bar{e}_1), \ldots, pr(\bar{e}_{m-1})\rangle)/I_G M \\
= \ & \sharp (M + (\overset{m-1}{\bigoplus} I_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z})^G)/I_G M \\
= \ & \sharp M/I_G M \cdot \sharp (M + (\overset{m-1}{\bigoplus} I_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z})^G)/M \\
= \ & \sharp M/I_G M \cdot \sharp (\overset{m-1}{\bigoplus} I_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z})^G / \sharp M \cap (\overset{m-1}{\bigoplus} I_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z})^G \\
= \ & n^{m-1} \cdot \sharp H^{-1}(G, M) / \sharp H^0(G, M).
\end{aligned}$$

となって、補題 1 により、補題 2 が示される。

2.

m を自然数とし、$\tau: \overset{m}{\oplus} \mathbf{Z}[G] \longrightarrow I_G$ を、cokernel が有限の $\mathbf{Z}[G]$- 準同型とする。$I_G \operatorname{Im} \tau$ の I_G の中での指数も有限である。

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \tau \cap \overset{m}{\bigoplus} I_G \longrightarrow \overset{m}{\bigoplus} I_G \longrightarrow I_G \operatorname{Im} \tau \longrightarrow 0$$

は exact で、$I_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ は、$\mathbf{Q}$ の有限次拡大の有限直和であるから、

(2.1)

$$\begin{aligned}
& (\operatorname{Ker} \tau \cap \overset{m}{\bigoplus} I_G) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \\
\cong \ & \overset{m-1}{\bigoplus} I_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = \overset{m-1}{\bigoplus} A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}
\end{aligned}$$

特に、補題 2 は、$\overset{m-1}{\oplus} A_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ の代わりに、 $\mathrm{Ker}\,\tau \cap \overset{m}{\oplus} I_G$ としても、成立する。

ここで、次の補題を示す。

補題 3 自然数 t_i と、$u_i \equiv t_i \cdot e_i \bmod \overset{m}{\oplus} I_G$ をみたす $\mathrm{Ker}\,\tau$ の元 u_i が、$i = 1, \ldots, m$ について、与えられているとする。(e_i は、$\overset{m}{\oplus} \mathbf{Z}[G]$ の、標準的な i-番目の生成元。) $U = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$、$W_0 = \overset{m}{\oplus} \mathbf{Z}[G]/U$ と、おいた時、$H^{-1}(G, W_0)$ の位数は、G の位数 n で、割りきれる。

証明。

$$
\begin{aligned}
H^{-1}(G, W_0) &\cong H^0(G, U) \\
&\cong H^0(G, nU) \\
&\cong H^{-1}(G, \overset{m}{\bigoplus} \mathbf{Z}[G]/nU)
\end{aligned}
$$

であるから、U の代わりに、nU とることにより、全ての i について、t_i は n で割りきれるとしてよい。$d_i = t_i/n$ とおく。

$Tr_G \equiv n \bmod I_G$ であるから、

$$
\begin{aligned}
H^{-1}(G, W_0) &= \mathrm{Ker}\,(Tr_G : W_0/I_G W_0 \longrightarrow W_0) \\
&= \mathrm{Ker}\,(Tr_G|_{n(W_0/I_G W_0)} : {}_n(W_0/I_G W_0) \longrightarrow W_0)
\end{aligned}
$$

がわかる。ここで、${}_nA = \{a \in A | na = 0\}$。また、$n \mid t_i$ としたから、${}_n(W_0/I_G W_0) \cong \overset{m}{\oplus} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ で、これは、$d_i \cdot e_i$; $i = 1, \ldots, m$ により、生成されている。各 $i = 1, \ldots, m$ について、$y_i = d_i \cdot Tr_G \cdot e_i - u_i$ とおき、

$$
Y = \langle y_1, \ldots, y_m \rangle \quad (\subseteq \overset{m}{\bigoplus} I_G \cap \mathrm{Ker}\,\tau)
$$

とかくと、明らかに、$I_G Y = I_G U$ である。さらに、u_i についての条件から、

$$
\begin{aligned}
U/U \cap \overset{m}{\bigoplus} I_G &\cong U + \overset{m}{\bigoplus} I_G / \overset{m}{\bigoplus} I_G \\
&\cong \overset{m}{\bigoplus} \mathbf{Z} \cong U/I_G U
\end{aligned}
$$

となって、$U \cap \overset{m}{\oplus} I_G = I_G U = I_G Y$ であることがわかる。よって、同型

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker}\tau \cap (U + \overset{m}{\oplus} I_G))/U &\cong \operatorname{Ker}\tau \cap \overset{m}{\oplus} I_G \,/\, U \cap \overset{m}{\oplus} I_G \cap \operatorname{Ker}\tau \\ &= (\operatorname{Ker}\tau \cap \overset{m}{\oplus} I_G)/I_G Y\end{aligned}$$

により、次の可換図式がえられる。

$$\begin{tikzcd} {}_n(W_0/I_G W_0) \arrow[r, "Tr_G"] \arrow[dd, equal] & (\operatorname{Ker}\tau \cap (U + \oplus^m I_G))/U \arrow[r, hook] & \operatorname{Ker}\tau/U \\ & \operatorname{Ker}\tau \cap \oplus^m I_G/I_G Y \arrow[u, "\cong"'] & \\ \oplus^m \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \arrow[r, "\eta"] & Y/I_G Y \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

ここで、η は、$\overset{m}{\oplus} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ の標準的な i- 番目の生成元 $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ を、$y_i \bmod I_G Y$ にうつす、$\mathbf{Z}[G]$- 準同型。従って、

$$H^{-1}(G, W_0) \cong \operatorname{Ker}\eta$$

がわかる。この時、Y が、上の、(2.1) の後半の条件を満たしていることに、注意すれば、$\sharp Y/I_G Y$ は、n^{m-1} を、割りきることがわかる。

$$\begin{aligned}\sharp H^{-1}(G, W_0) &= \sharp \operatorname{Ker}\eta \\ &= n^m / \sharp(Y/I_G Y)\end{aligned}$$

であるから、$H^{-1}(G, W_0)$ の位数は n で割りきれる。

3. 定理の証明

$G = H/N$ とかく。$V_{H\to N} = V_{H\to N'} \circ V_{N'\to N}$ であるから、G は、ある素数 p について、Abel p- 群としてよい。$n = \sharp G$ とおく。

$(f_{g,h})$ を、群拡大

$$1 \longrightarrow N^{ab} \longrightarrow H/N^c \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

の cohomology 類を与える 2-cocycle とする。Artin の splitting module W は、$\{x_g \mid g \in G \setminus \{1\}\}$ を、$G \setminus \{1\}$ で parametrize された symbol として、

$$W = N^{ab} \oplus \Big(\bigoplus_{g \in G\setminus\{1\}} \mathbf{Z} \cdot x_g \Big)$$

に、G の作用を

$$g \cdot x_h = x_{g \cdot h} - x_g + f_{g,h} \quad x_1 = 1 \quad (g, h \in G)$$

で与えて定義される。この時、各 $g \in G \setminus \{1\}$ について、$g - 1 \in I_G$ を、x_g に、うつす写像により、exact

$$0 \longrightarrow N^{ab} \longrightarrow W \longrightarrow I_G \longrightarrow 0$$

がえられ、さらに $W/I_GW \cong H^{ab}$ で、trace homomorphism $Tr_G\colon W/I_GW \longrightarrow N^{ab}$ は、目的の group-transfer $V_{H\to N}\colon H^{ab} \longrightarrow N^{ab}$ に、一致することがわかる (Artin-Tate, Class Field Theory 参照)。従って、$\sharp H^{-1}(G, W) \geq n$ を示せばよいことがわかる。よって、次を示せば十分である。

Fact 補題 3 のタイプの W_0 から、W への $\mathbf{Z}[G]$- 準同型 $\psi : W_0 \longrightarrow W$ で、G- 不変な剰余の p-part に、同型

$$\bar{\psi}_p : (W_0/I_GW_0)_p \longrightarrow (W/I_GW)_p$$

を、引き起こすものが存在する。

証明。

$$H^{ab} = W/I_GW \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbf{Z}/q_i\mathbf{Z}$$

とかく。$\overset{m}{\oplus} \mathbf{Z}[G]$ の i- 番目の生成元 $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ を、$\bigoplus_{i=1}^{m} \mathbf{Z}/q_i\mathbf{Z}$ の i- 番目の生成元 $h_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ の代表にうつすような、Z[G]- 準同型 $\varphi\colon \overset{m}{\oplus} \mathbf{Z}[G] \longrightarrow W$ を、一つとると、次の可換図式がえられる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\, nat\circ\varphi & \longrightarrow & \bigoplus^m \mathbf{Z}[G] & \xrightarrow{nat\circ\varphi} & I_G & & \\
& & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & N^{ab} & \longrightarrow & W & \xrightarrow{nat} & I_G & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

さらに、中山の補題により、φ の (p) での局所化は、全射である。すなわち、φ の cokernel は、p と素な有限位数 s の $\mathbf{Z}[G]$- 加群である。よって、各 $i = 1, \ldots, m$ について、$u_i \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ が、$u_i \equiv s \cdot q_i \cdot e_i \bmod \overset{m}{\oplus} I_G$ とされる。$U =$

$\langle u_1, \ldots, u_m \rangle$、 $W_0 = \overset{m}{\oplus} \mathbf{Z}[G]/U$ とおき、ψ を、φ で引き起こされた $\mathbf{Z}[G]$-準同型 とすると、明らかに、ψ は、

$$\bar{\psi}_p : (W_0/I_G W_0)_p \longrightarrow (W/I_G W)_p$$

を引き起こす。さらに、$\tau = nat \circ \varphi$、各 i について $t_i = s \cdot q_i$ とおけば、これらが、求めるものである。

以上で定理が示された。

注意　上の証明を逆にたどれば、少なくとも、各 q_i が全て n で割りきれた時は、丁度 $\sharp \mathrm{Ker}\, V_{H \to N} = [H : N]$ となる有限群 H が、存在することがわかる。

補題 1 の証明が、わかりやすくなっているのは、岩澤先生のおかげである。この場をかりて感謝したい。